ماتریس ممان اینرسی و محاسبه آن:

محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی یکی از مواردی است که در آن محاسبات تدریس شده درباره‌ی انتگرال‌های یگانه، دوگانه و سه‌گانه است. دلیل اصلی این است که باید دقت کنید که ماتریس ممان اینرسی خاصیت جمع‌پذیری دارد یعنی اگر ممان اینرسی جسم ۱ حول نقطه‌ی A و از دید دستگاه s ${}^{s}I_A(1)$ باشد و ممان اینرسی جسم ۲ حول نقطه‌ی A و از دید دستگاه s ${}^{s}I_A(2)$ باشد، آن‌گاه اگر جسمی متشکل از جسم ۱ و ۲ ساخته و آن را جسم ۳ بنامیم، داریم:

$$ {}^{s}I_A(3) = {}^{s}I_A(1) + {}^{s}I_A(2) $$

ما از این موضوع در محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی اجسام بسیار استفاده می‌کنیم.

حال می‌خواهیم در حالت کلی با فرض ${}^{s}r_{AK} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ عبارت ${}^{s}I_A$ را بدست آوریم.

$$ {}^{s}I_A = \sum m_k (\rho_{AK}^2 I_{3\times3} - {}^{s}r_{AK}\ {}^{s}r_{AK}^T) $$

با توجه به اینکه $\rho_{AK}^2 = {}^{s}r_{AK}^T\ {}^{s}r_{AK}$ است داریم:

$$ \begin{aligned} {}^{s}I_A &= \sum m_k ({}^{s}r_{AK}^T\ {}^{s}r_{AK} I_{3\times3} - {}^{s}r_{AK}\ {}^{s}r_{AK}^T) \\ &= \sum m_k \left[\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+y^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \sum m_k \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \end{aligned} $$

اگر تعداد kها بسیار زیاد باشد $\sum$ به انتگرال $\int$ تبدیل می‌شود:

$$ {}^{s}I_A = \int_M \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} dm $$

ملاحظه می‌کنید که انتگرال بوجود آمده در حقیقت انتگرال سه‌گانه است. مثلاً اگر $\sigma(x,y,z)$را چگالی حجمی جسم در نقطه‌ی (x,y,z)در نظر بگیریم، آن‌گاه $dm = \sigma(x,y,z)dV = \sigma(x,y,z)dxdydz$ است و به عنوان نمونه آخرین درایه ماتریس ممان اینرسی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_{zz} = \int_M (x^2 + y^2)dm = \iiint\limits_{V(\text{حجم جسم})} (x^2 + y^2)\sigma(x, y, z)dxdydz$$

در صورتی که جسم همگن باشد و توزیع جرمی در همه‌ی جسم یکسان باشد آن‌گاه:

$$\sigma(x, y, z) = \frac{M_{\text{کل}}}{V_{\text{کل}}} = \sigma$$

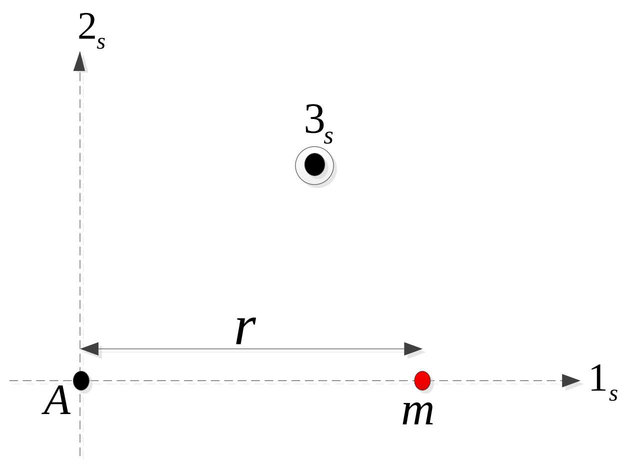
بنابراین:

$$I_{zz} = \iiint\limits_{V(\text{حجم جسم})} (x^2 + y^2)\sigma(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V(\text{حجم جسم})} \sigma(x^2 + y^2)dxdydz$$

مشاهده می کنید که گویا با یک انتگرال سه گانه مواجهیم ولی در ادامه‌ی کار تمام سعی خود را خواهیم نمود تا این انتگرال را به انتگرال یگانه تبدیل کنیم. همچنین اگر جسم نسبت به محورها متقارن باشد تنها درایه‌های قطر اصلی ماتریس ممان اینرسی مخالف صفر هستند. نکته‌ی جالب توجه دیگر این است که هرچقدر هم که یک جسم نامتقارن باشد می‌توان اثبات کرد که همواره دستگاهی می‌توان یافت که ماتریس ممان اینرسی حول آن قطری گردد.

مثال) محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی جسم ذره‌ای به جرم m حول نقطه‌ی A

برای ساده‌تر شدن ماتریس ممان اینرسی دستگاه s را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که بردار r تنها در راستای یکی از محورهای آن مولفه داشته باشد.



آن‌گاه ماتریس ممان اینرسی برابر خواهد بود با:

$$ {}^{s}I_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{pmatrix} $$

و اگر تنها حول محور سوم سرعت دورانی داشته باشد یعنی $ {}^{s}\omega_{is} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ باشد، آن‌گاه بردار اندازه حرکت دورانی از دید اینرسی و بیان شده در s خواهد شد:

$$ {}^{s}H_i = {}^{s}I_A \, {}^{s}\omega_{is} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\omega \end{pmatrix} $$

و اگر می‌خواستیم به حرکت خطی آن نگاه کنیم، به هنگام چرخش $|v| = r\omega$ است و برای اندازه حرکت خطی داریم:

$$ {}^{s}v = \begin{pmatrix} r\omega\sin(\theta) \\ r\omega\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}^{s}P_i = m \, {}^{s}v = \begin{pmatrix} mr\omega\sin(\theta) \\ mr\omega\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} $$

دقت کنید که مشتق ${}^{s}P_i$ از دید اینرسی نیروی برآیند می‌شود و مشتق ${}^{s}H_i$ از دید اینرسی گشتاور نیروی برآیند است. توجه داشته باشید که گشتاور نیروی برآیند یک r بیشتر دارد و فرق نیروی برآیند و گشتاور نیروی برآیند نیز در همین r بوده است. به این ترتیب مشاهده کردید که به دو صورت می‌توان به حرکت یک ذره نگاه کرد و حرکت خطی و حرکت دورانی هر دو به یک پاسخ می رسند.

در مورد انرژی جنبشی نیز چنین است و عدد انرژی جنبشی با نگاهِ دورانی برای این ذره خواهد بود:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & \omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & mr^2 & 0\\ 0 & 0 & mr^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{pmatrix}=\frac{1}{2}I_{zz}\omega^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

و از آن جایی که $|v|=r\omega$است، عدد انرژی جنبشی با نگاه انتقالی(خطی)($\frac{1}{2}mv^2$) نیز $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ شده و با مقدار انرژی جنبشی که با دیدگاه دورانی به دست آمد، برابر است.

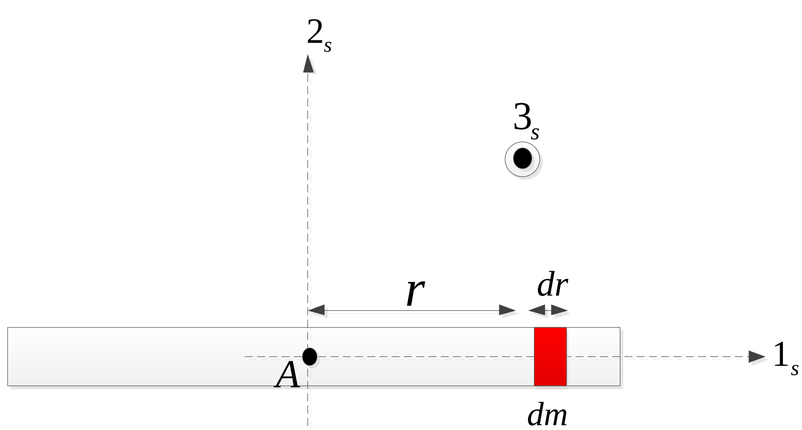
(در کتاب هالیدی نیز وقتی $\frac{1}{2}I\omega^2$ را می‌بینید منظور همان $\frac{1}{2}I_{zz}\omega^2$و یا $\frac{1}{2}I_{yy}\omega^2$است. چرا که در آن‌جا فرض بر این است که دوران تنها حول یک محور و به اندازه‌ی ωانجام گرفته است.)

♦

در ادامه با استفاده از نتیجه‌ی بالا برای یک میله که ضخامت آن ناچیز در نظرگرفته شده است به محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی می‌پردازیم.

مثال) محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی برای یک میله

فرض می‌کنیم جرم کل میله M و طول آن L است. می‌خواهیم ماتریس ممان اینرسی را حول مرکز میله و از دید دستگاهی که در شکل تعریف می‌کنیم بدست آوریم.



به دلیل تقارنی که با تعریف مناسب دستگاه بوجود آمد داریم:

$I_{xx}=0 \qquad I_{yy}=I_{zz}$

و داریم:

$$I_{yy} = I_{zz} = \int_M r^2 dm$$

حال باید dm را بر حسب r بدست آوریم. dm برابراست با طول ضربدر جرم واحد طول. بنابراین:

$$I_{yy} = I_{zz} = \int_M \; r^2 \frac{M}{L} \, dr \; = \frac{M}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \, dr \; = \frac{2M}{L} \int_{0}^{\frac{L}{2}} r^2 \, dr \; = \frac{1}{12} M L^2$$

بنابراین:

$$ {}^{s}I_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} M L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} M L^2 \end{pmatrix}$$

حال اگر میله را طوری دوران دهیم که ω هم مولفه‌ای روی y و هم مولفه‌ای روی z داشته باشد آن‌گاه انرژی جنبشی دورانی میله برابر خواهد بود با:

$$\frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2$$

حال اگر ضمن دوران دادن، میله را با سرعت v_A حرکت دهیم انرژی جنبشی آن نسبت به کسی که روی زمین ساکن ایستاده است برابر خواهد بود با مجموع انرژی جنبشی دورانی و انتقالی :

$$\frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 + \frac{1}{2} M v_A^2$$

♦

حال می‌خواهیم برای محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی برای یک صفحه به طول L و عرض pاز ماتریس ممان اینرسی میله استفاده کنیم. ولی باید بتوان میله‌ای به فاصله‌ی y از مرکز صفحه یعنی A را نیز داشت.

مثال) محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی برای یک صفحه

برای حل این مسأله به یک مسأله‌ی کلی توجه می‌کنیم.

اگر ماتریس ممان اینرسی حول cm محاسبه شده باشد، ماتریس ممان اینرسی حول A چه می‌شود؟ به عبارت دیگر رابطه‌ی ${}^{s}I_{cm}$ و ${}^{s}I_{A}$ بر حسب r_{Acm} چه می‌شود؟

می‌دانیم:

$${}^{s}I_A = \sum m_k(\rho_{AK}^2 I_{3\times3} - {}^{s}r_{AK}\ {}^{s}r_{AK}^T) = \sum m_k({}^{s}r_{AK}^T\ {}^{s}r_{AK} I_{3\times3} - {}^{s}r_{AK}\ {}^{s}r_{AK}^T)$$

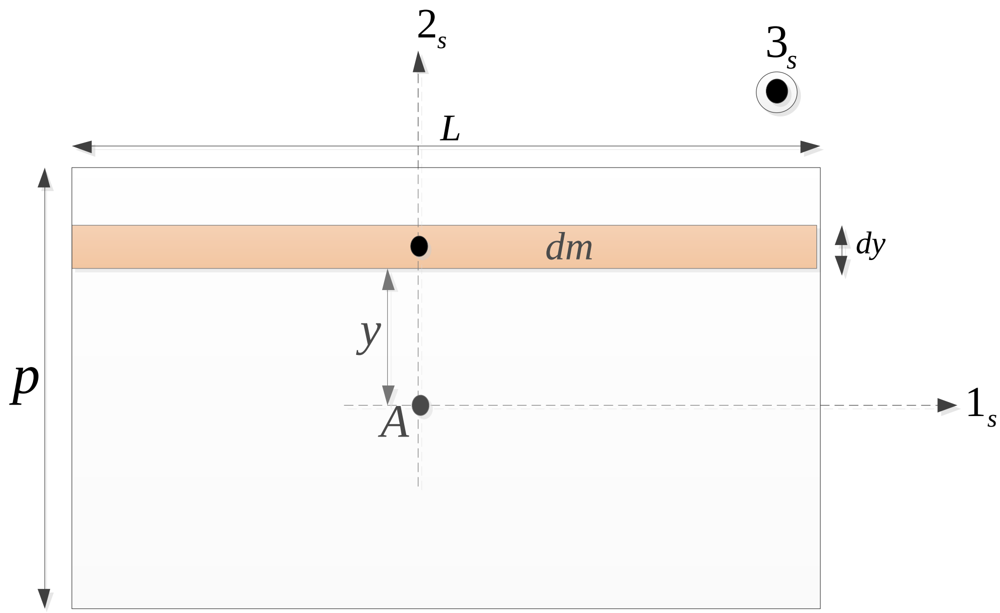
با توجه به اینکه $r_{AK} = r_{Acm} + r_{cmK}$ است، داریم:

$$\begin{aligned}
{}^{s}I_A = \sum m_k(&({}^{s}r_{Acm} + {}^{s}r_{cmK})^T({}^{s}r_{Acm} + {}^{s}r_{cmK})I_{3\times3} - ({}^{s}r_{Acm} \\
&+ {}^{s}r_{cmK})({}^{s}r_{Acm} + {}^{s}r_{cmK})^T) \\
&= \sum m_k({}^{s}r_{Acm}^T\ {}^{s}r_{Acm} I_{3\times3} + {}^{s}r_{cmK}^T\ {}^{s}r_{Acm} I_{3\times3} + {}^{s}r_{Acm}^T\ {}^{s}r_{cmK} I_{3\times3} \\
&+ {}^{s}r_{cmK}^T\ {}^{s}r_{cmK} I_{3\times3} - {}^{s}r_{Acm}\ {}^{s}r_{Acm}^T - {}^{s}r_{cmK}\ {}^{s}r_{Acm}^T - {}^{s}r_{Acm}\ {}^{s}r_{cmK}^T \\
&- {}^{s}r_{cmK}\ {}^{s}r_{cmK}^T) \\
&= \sum m_k({}^{s}r_{Acm}^T\ {}^{s}r_{Acm} I_{3\times3} - {}^{s}r_{Acm}\ {}^{s}r_{Acm}^T) \\
&+ \sum m_k({}^{s}r_{cmK}^T\ {}^{s}r_{cmK} I_{3\times3} - {}^{s}r_{cmK}\ {}^{s}r_{cmK}^T) + \sum m_k\ {}^{s}r_{Acm}^T\ {}^{s}r_{cmK} I_{3\times3} \\
&+ \sum m_k\ {}^{s}r_{cmK}^T\ {}^{s}r_{Acm} I_{3\times3} - \sum m_k\ {}^{s}r_{cmK}\ {}^{s}r_{Acm}^T - \sum m_k\ {}^{s}r_{Acm}\ {}^{s}r_{cmK}^T \\
&= {}^{s}I_{Acm} + {}^{s}I_{cm} + {}^{s}r_{Acm}^T \overbrace{\left(\sum m_k\ {}^{s}r_{cmK}\right)}^{\text{صفر}} I_{3\times3} + \overbrace{\left(\sum m_k\ {}^{s}r_{cmK}^T\right)}^{\text{صفر}}\ {}^{s}r_{Acm} I_{3\times3} - 0 \\
&- 0
\end{aligned}$$

بنابراین:

$${}^{s}I_A = {}^{s}I_{Acm} + {}^{s}I_{cm} = {}^{s}I_{A(M)} + {}^{s}I_{cm}$$

عبارت ${}^{s}I_{A(M)}$ ماتریس ممان اینرسی در حالتی است که کل جرم نسبت بهA درcm متمرکز شده است.



به این ترتیب در مثال بالا برای dm نشان داده شده، $r_{Acm}=\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}$ است و لذا برای این عنصر داریم:

$$
{}^{s}I_A(dm) = {}^{s}I_{A(M)} + {}^{s}I_{cm} = \begin{pmatrix} y^2dm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2dm \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}L^2dm & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}L^2dm \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} y^2dm & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}L^2dm & 0 \\ 0 & 0 & y^2dm + \frac{1}{12}L^2dm \end{pmatrix}
$$

حال برای کل صفحه، با تعریف جرم واحد سطح داریم:

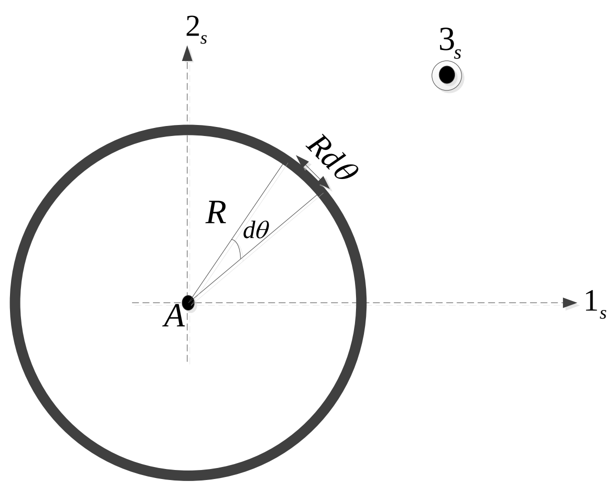
$$
dm = \frac{M}{Lp} \times Ldy = \frac{M}{p}dy
$$

وممان اینرسی کل صفحه:

$$
{}^{s}I_A\left(\text{کل صفحه}\right)=\frac{M}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\begin{pmatrix} y^2dy & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{12}L^2dy & 0\\ 0 & 0 & \left(y^2+\frac{1}{12}L^2\right)dy\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\frac{1}{12}Mp^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{12}ML^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(p^2+L^2)\end{pmatrix}
$$

مثال) محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی برای یک حلقه



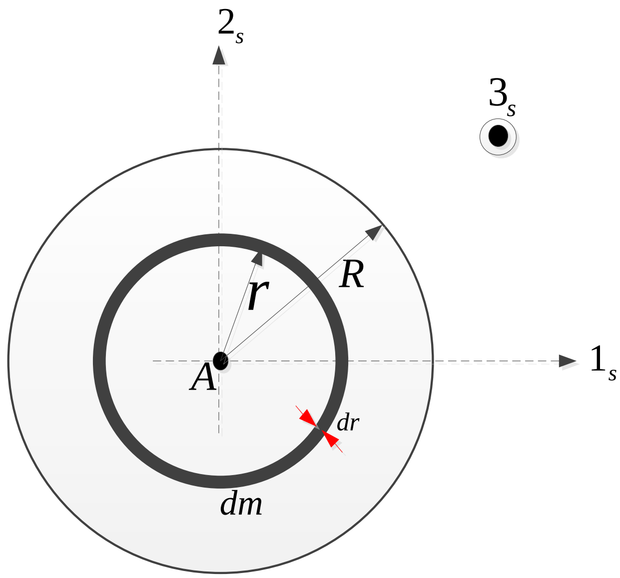
مطابق شکل بالا داریم:

$$
dm=\frac{M}{2\pi R}Rd\theta=\frac{M}{2\pi}d\theta
$$

که در رابطه‌ی بالا $\frac{M}{2\pi R}$ چگالی طولی حلقه و $Rd\theta$ طول المان dm انتخاب شده روی حلقه است. و از آن‌جایی که ${}^{s}r_{AK}=\begin{pmatrix}Rcos(\theta)\\ Rsin(\theta)\\ 0\end{pmatrix}$ است داریم:

$$
{}^{s}I_A=\frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}R^2\sin^2\theta & -R^2\sin\theta\, cos\theta & 0\\ -R^2\, cos\theta\sin\theta & R^2\cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & R^2\end{pmatrix}d\theta=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 & 0\\ 0 & 0 & MR^2\end{pmatrix}
$$

مثال) محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی برای یک دیسک



با توجه به نتیجه‌ی بخش قبل به محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی یک دیسک می‌پردازیم.

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r\, dr = \frac{2M}{R^2} r\, dr$$

که در رابطه‌ی بالا $\frac{M}{\pi R^2}$ چگالی سطحی دیسک و $2\pi r\, dr$ مساحت المان dm انتخاب شده روی دیسک است.

I_{zz} دیسک برای dm برابر است با:

$$I_{zz}(dm) = r^2 dm$$

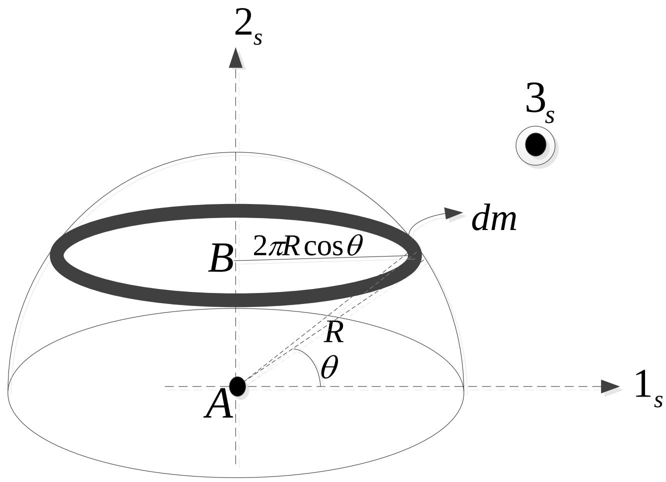
بنابراین:

$$I_{zz} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} MR^2$$

و به طور مشابه I_{xx} و I_{yy}، $\frac{1}{4} MR^2$ بدست می‌آیند و درنهایت:

$$^{s}I_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} MR^2 \end{pmatrix}$$

مثال) محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی برای یک کره یا توپ توخالی



چون کره متقارن است پس ممان اینرسی آن حول همه‌ی محورهای ۱، ۲ و ۳ و هر محور دیگری جواب یکسانی خواهد داشت. ما حول محور دوم در نظر می‌گیریم. به دلیل اینکه A از B فاصله‌ای در امتداد محور دوم نداردپس عبارت اضافی ندارد. به دلیل اینکه مساحت دیسک انتخاب شده $2\pi R cos\theta \times R d\theta$ است، داریم:

$$dm = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi R^2 cos\theta d\theta = \frac{M}{2} cos\theta d\theta$$

همچنین برای ممان المان dmاز روی آنچه بالاتر به دست آمد، داریم:

$$I_{A(yy)}(dm) = \frac{1}{2}(\frac{M}{2}\cos\theta\, d\theta)(R^2\cos^2\theta)$$

و ممان کره خواهد بود:

$$I_A^{\text{نیمکره}} = \frac{1}{4}MR^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\, d\theta \qquad \rightarrow \qquad I_A^{\text{کره}} = \frac{1}{2}MR^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\, d\theta = \frac{2}{3}MR^2$$

و برای کره‌ی توپر از روی عبارتی که برای کرۀ توخالی به دست آمد، داریم:

$$dm = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}4\pi r^2 dr = \frac{3M}{R^3}r^2 dr \rightarrow I_A^{\text{کره}} = \int_0^R \frac{2}{3}\left(\frac{3M}{R^3}r^2 dr\right)r^2 = \frac{2M}{R^3}\int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5}MR^2$$